

8. (15 points) Let

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 30 \\ -9 & -14 \end{bmatrix}$$

Find a matrix B with $B^2 = A$.

$$\det A - \lambda I = \det \begin{pmatrix} 19-\lambda & 30 \\ -9 & -14-\lambda \end{pmatrix} = (19-\lambda)(-14-\lambda) + 270 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$$

The e.vect. for $\lambda=1$

$$A - I = \begin{bmatrix} 18 & 30 \\ -9 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow \frac{1}{9}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ -9 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2 + 9R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{5}{3}x_2 \\ x_2 = x_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} \checkmark$$

The e. vector for $\lambda=4$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ -9 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow \frac{1}{15}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -9 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2 + 9R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = x_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$A \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Let } B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Check } \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 30 \\ -9 & -14 \end{bmatrix} \checkmark$$

~~64~~
83